MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU
COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică şi Fizică
"Vrănceanu – Procopiu"
Ediția a XVI –a, 2014

IX

Problema I (10 puncte)

Se consideră numerele reale strict pozitive a, b şi c astfel încât $a \le b \le c, b \ne 1$ şi $a+b+c = abc+2$.

a) Arătați că numerele $1-ab, 1-bc$ şi $1-ca$ au acelaşi semn.

b) Dacă n este un număr natural oarecare, demonstrați că numerele $1-ab^nc$ şi $1-b$ au acelaşi semn.

Vasile Cârtoaje

Soluție.

a) Deoarece $(1-ab)(1-bc) = 1-ab-bc+b(a+b+c-2) = (b-1)^2 > 0$, numerele $1-ab$ şi $1-bc$ au acelaşi semn. Analog se arată că numerele $1-ab$ şi $1-ca$ au acelaşi semn. **(3p)**

b) Dacă $b<1$, atunci $a<1$, deci $1-ab>0$. Conform punctului a), rezultă că $1-ca>0$. Rezultă că $1-ab^nc > 1-a\cdot 1\cdot c > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, prin urmare numerele $1-ab^nc$ şi $1-b$ sunt, ambele, pozitive. **(3p)**

Dacă $b>1$, atunci $c>1$, deci $1-bc<0$. Conform punctului a), rezultă că $1-ca<0$. Rezultă că $1-ab^nc < 1-a\cdot 1\cdot c < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, prin urmare numerele $1-ab^nc$ şi $1-b$ sunt, ambele, negative. **(3p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Determinați numerele naturale n pentru care există numere reale pozitive x şi y astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ şi $\sqrt{x+n}+\sqrt{y+n} \in \mathbb{N}$.

Marius Ghergu

Soluție.

Notăm $k = \sqrt{x+n}+\sqrt{y+n}, k \in \mathbb{N}$. Dacă $x=y$, atunci $x=y=1$ şi, deoarece $k = 2\sqrt{n+1} \in \mathbb{N}$, rezultă că $n = p^2-1$, cu $p \in \mathbb{N}, p \ge 2$. **(2p)**

Dacă $x \ne y$ putem presupune, datorită simetriei, că $x<y$. Atunci $x<1<y$ şi $k \ge \sqrt{n}+\sqrt{n+1} > \sqrt{4n+1}$. **(1p)**

Pe de altă parte, $k < 2\sqrt{\frac{(x+n)+(y+n)}{2}} = 2\sqrt{n+\frac{x+y}{2}} < 2\sqrt{n+2}$, deoarece $x+y = 4-2\sqrt{xy} < 4$. **(2p)**

Rezultă că $4n+1 < k^2 < 4n+8$, de unde $k^2 = 4n+4$ sau $k^2 = 4n+5$. În primul caz nu obținem noi soluții n. **(2p)**

În cel de-al doilea caz obținem că $n = p^2+p-1$, cu $p \in \mathbb{N}^*$, pentru care există valorile $x = \left(1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4n+5}{4n+1}}\right)^2$ şi $y = \left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4n+5}{4n+1}}\right)^2$ care satisfac cerințele problemei. **(2p)**